8) Stabilité et précision

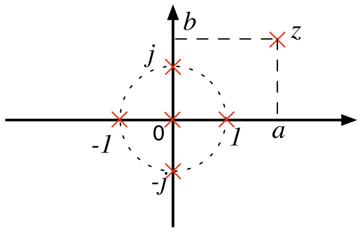
1. Les nombres complexes

1.1. Présentation

j est le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$. Tout nombre complexe z peut se décomposer de façon unique comme la somme d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire. $z = a + jb$ avec a la partie réelle et b la partie imaginaire. a et b sont des nombre réels.

1.2. Plan complexe

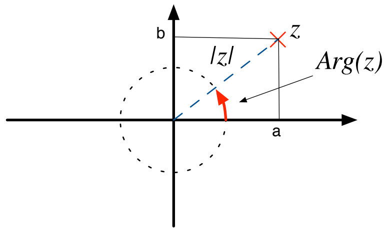
Dans la mesure où un nombre complexe se décompose en deux parties, on peut représenter z sur le plan complexe, avec b comme ordonnée et a comme abscisse.



1.3. Module et argument

Le nombre complexe $z = a + jb$ peut s'écrire sous la forme $z = |z|.e^{j\times Arg(z)}$, avec $|z|$ le module de z et $Arg(z)$ l'argument de z. Sur le plan complexe :

- $z = a + jb$;
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $Arg(z) = arctg(\frac{b}{a})$;
- $\frac{b}{a} = tg(Arg(z))$.



1.4. Propriétés

Avec $a \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}$:

$$Arg(a) = 0\ ;\ Arg(ja) = \frac{\pi}{2}\ ;\ Arg(e^{ja}) = a\ ;\ Arg(zz') = Arg(z) + Arg(z')\ ;\ Arg(\frac{1}{z}) = -Arg(z)\ ;$$

$$|a| = a\ ;\ |ja| = a\ ;\ \left|e^{ja}\right| = \left|e^{-ja}\right| = 1\ ;\ |zz'| = |z||z'|\ ;\ \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}\ ;\ \frac{1}{j} = -j.$$

2. La transformée de Laplace

2.1. Raisons d'être des différentes transformées

Pour avoir la relation (s = H × e) écrite au chapitre 1) pour chacun des types de signaux que l'on rencontre, on a 'inventé' des transformées différentes :

- Pour les signaux sinusoïdaux ; les nombres complexes ;
- Pour les signaux causaux ; la transformée de Laplace ;
- Pour les signaux périodiques : la transformée de Fourrier ;
- Pour les signaux numériques : la transformée en Z.

Pour la régulation, partant du fait qu'au 'début' toutes les grandeurs physiques sont à 0 (ou presque), on utilise la transformée de **Laplace**. On remarquera que toutes ces représentations utilisent des nombres complexes.

2.2. Propriétés de la transformée de Laplace

$f() : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ g() : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ a \in \mathbb{R}$	
$\mathscr{L}[f() + g()] = \mathscr{L}[f()] + \mathscr{L}[g()]$	$\mathscr{L}[a \times f()] = a \times \mathscr{L}[f()]$
$\mathscr{L}[f'()] = p \times \mathscr{L}[f()] - f(0)$	$\mathscr{L}[\int f()] = \frac{\mathscr{L}[f()]}{p}$
$f() : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ g() : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ T \in \mathbb{R}^+\ ;\ \forall t \in \mathbb{R} : g(t) : f(t-T)\ ;\ F() = \mathscr{L}[f()]$	
$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$	$\mathscr{L}[g()] = \mathscr{L}[f()] \times e^{-Tp}$

2.3. Le Pic de Dirac

Pour les besoins du formalisme quantique, Paul Adrien Maurice Dirac a introduit un objet singulier, qu'on appelle aujourd'hui impulsion de Dirac ou masse de Dirac, notée $\delta(t)$. Cette impulsion représente un signal de durée théoriquement nulle et d'énergie finie et qui vérifie :

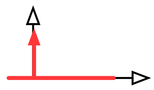
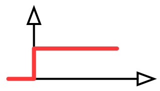
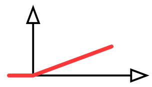
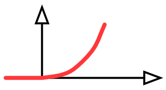
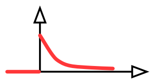
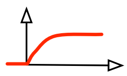
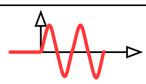
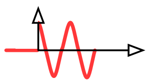
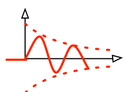
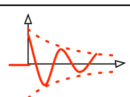
- $\int_0^{+\infty} \delta(t)dt = 1$;
- $\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$.

Dans le cas d'une fonction de transfert H(p), on remarque que si l'on prend e(t)=δ(t), on a s(p)=H(p). On parle de réponse impulsionnelle.
Une entrée en pic de Dirac permet de connaître directement la fonction de transfert d'un procédé.
L'impulsion de Dirac est l'élément neutre des transformées de Laplace.
De manière générale, il est assez difficile d'obtenir une impulsion de Dirac, un signal de durée nulle avec une énergie finie. Dans les recherches pétrolières, on simule le signal de Dirac par une explosion. Ce même signal a servi aussi à la modélisation des éclairs.

2.4. L'échelon

L'échelon u(t) est une variation brusque de valeur unitaire d'une grandeur physique. Il est plus facile à obtenir que le pic de Dirac. Ce signal sera utilisé par la plupart des méthodes d'identification des fonctions de transfert. Lorsque l'on soumet une fonction de transfert à un échelon, on parle de réponse indicielle.

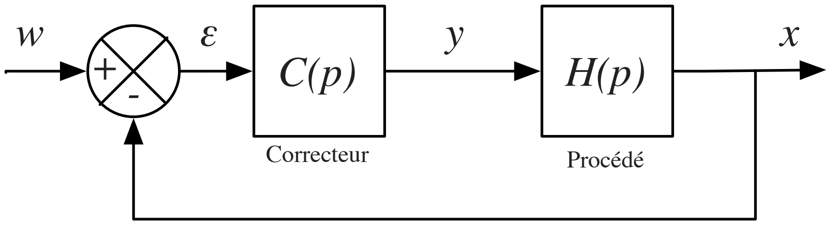
2.5. Table des transformés

Fonction	**Allure**	$f() : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$\mathscr{L}[f()]$
Dirac		$t \to \delta(t)$	$p \to 1$
Échelon		$t \to 1$	$p \to \dfrac{1}{p}$
Rampe		$t \to t$	$p \to \dfrac{1}{p^2}$
Puissance		$t \to t^n$	$p \to \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle		$t \to e^{-at}$	$p \to \dfrac{1}{p+a}$
Premier ordre		$t \to (1-e^{-at})$	$p \to \dfrac{1}{p} \times \dfrac{a}{p+a}$
Sinus		$t \to \sin(t)$	$p \to \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus		$t \to \cos(t)$	$p \to \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
Sinus amortie		$t \to e^{-at} \times \sin(t)$	$p \to \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
Cosinus amortie		$t \to e^{-at} \times \cos(t)$	$p \to \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

3. De la boucle ouverte à la boucle fermée

3.1. Notations

Dans la suite on représentera une boucle de régulation par le schéma bloc simplifié ci-dessous :



On trouve :

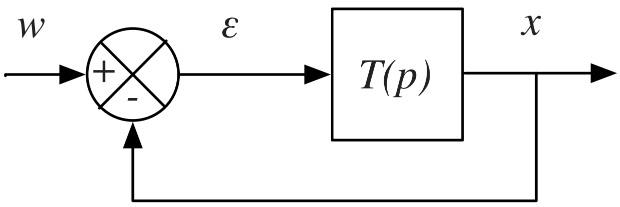
- La mesure x ;
- La consigne w ;
- La commande y ;
- L'erreur ε ;
- La fonction de transfert du correcteur du régulateur C ;
- La fonction de transfert du procédé H.

3.2. Calcul de T(p)

T(p) est la fonction de transfert en boucle ouverte : $T(p) = \frac{x(p)}{\varepsilon(p)}$.

$x(p) = H(p) \times y(p)$ et $y(p) = C(p) \times \varepsilon(p) \Rightarrow x(p) = C(p) \times H(p) \implies T(p) = C(p) \times H(p)$.

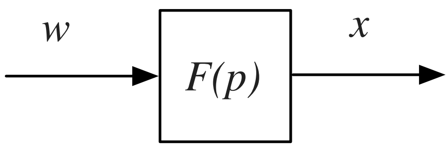
Le schéma équivalent devient :



3.3. Calcul de F(p)

F(p) est la fonction de transfert en boucle fermée : $F(p) = \frac{x(p)}{w(p)}$.

$$x(p) = T(p) \times \varepsilon(p) et\ \varepsilon(p) = w(p) - x(p)$$
$$x(p) = T(p) \times (w(p) - x(p))$$
$$x(p) + T(p) \times x(p) = T(p) \times w(p)$$
$$x(p) \times (1 + T(p)) = T(p) \times w(p)$$
$$\frac{x(p)}{w(p)} = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{T(p)}}$$



3.4. Calcul de ε(p)

$$\varepsilon(p) = w(p) - x(p)$$
$$\varepsilon(p) = w(p) - T(p) \times \varepsilon(p)$$
$$\varepsilon(p) + T(p) \times \varepsilon(p) = w(p)$$
$$\varepsilon(p) = \frac{w(p)}{1 + T(p)}$$

3.5. Formules à connaitre

$T(p) = C(p) \times H(p)$	$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{T(p)}}$	$\varepsilon(p) = \frac{w(p)}{1 + T(p)}$

3.6. Objectif de la régulation

Dans une régulation, on veut que la mesure x soit égale à la consigne w.

- L'objectif de toute régulation est de se rapprocher de : x(p) = w(p).
- L'objectif de toute régulation est de se rapprocher de : F(p) = 1.
- L'objectif de toute régulation est de se rapprocher de : T(p) = +∞.

4. Représentations harmoniques

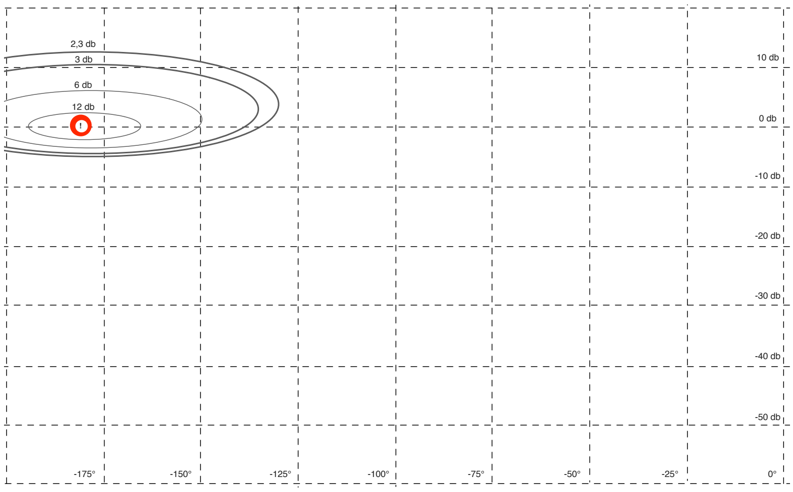
Pour avoir une représentation harmonique d'une fonction de transfert ou d'un signal dont on connaît sa transformée de Laplace, il suffit de remplacer p, par jω. ω la pulsation du signal et j l'unité imaginaire. Un des avantages des représentations harmoniques, c'est de transformer un produit de signaux en somme de d'amplitude ou de phase.

4.1. Lieux de Nyquiest

On se retrouve avec la représentation complexe classique. En abscisse, la partie réelle et en ordonnée la partie imaginaire. Cette représentation a peu d'intérêt.

4.2. Lieux de Black

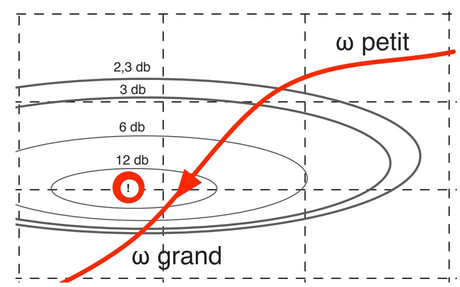
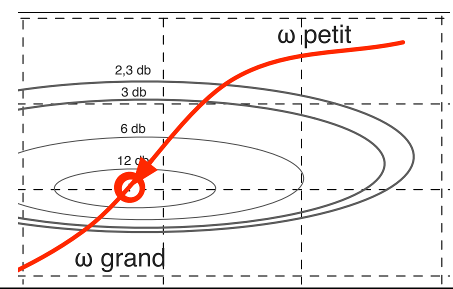
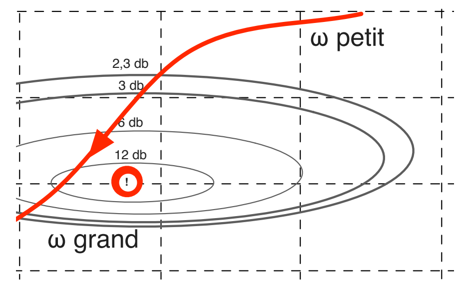
Cette représentation a la préférence des automaticiens. En abscisse, on trouve la valeur de l'argument. En ordonnée, on trouve la valeur du module en dB.



5. Stabilité d'un système bouclé

5.1. Critère simplifié du revers

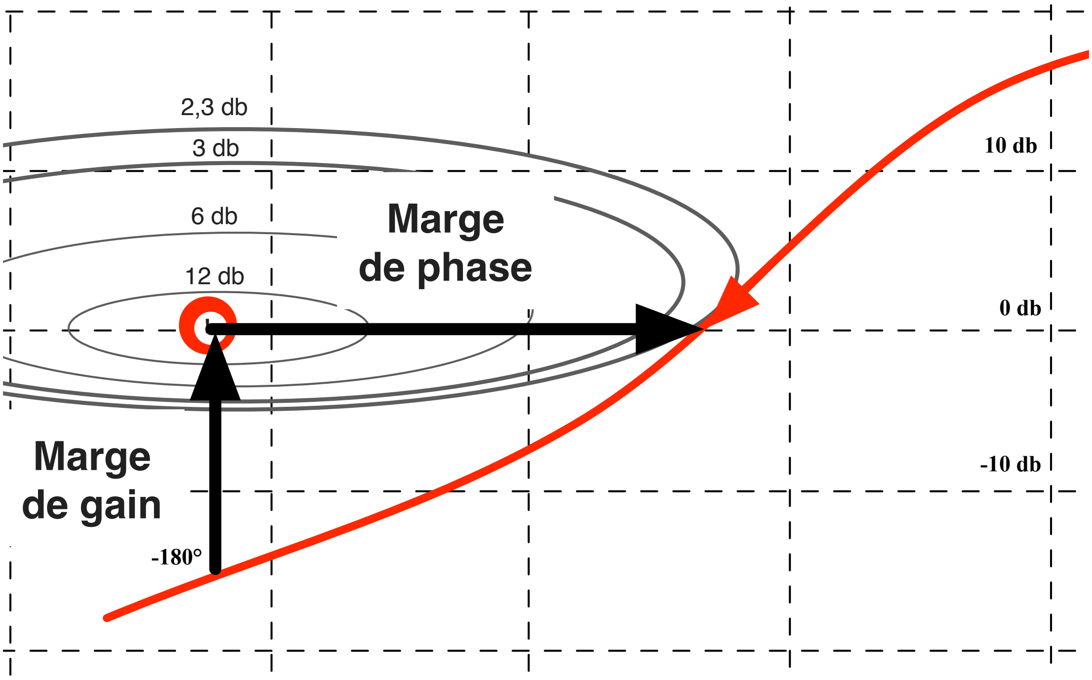
La position relative de la courbe T(jω) par rapport au point critique -1, permet de déterminer la stabilité du système.
Dans le plan de Black :

Système stable	Système critique	Système instable
		

5.2. Marges de stabilité

La distance qui sépare le lieu des points de T(jω) avec le point critique permet de juger du degré de stabilité du système. Plus ce lieu est éloigné du point critique, plus le système retrouvera rapidement le régime permanent. Cette marge peut être mesurée de deux manières différentes ;

- Sur l'axe des gains, on parle alors de marge de gain ;
- Sur l'axe des phases, on parle alors de marge de phase.



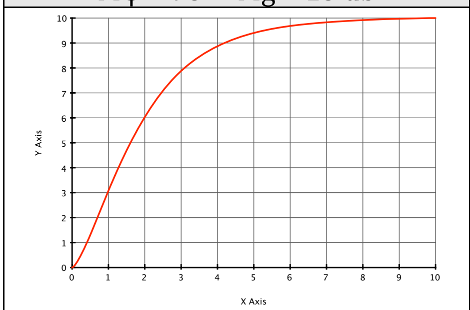
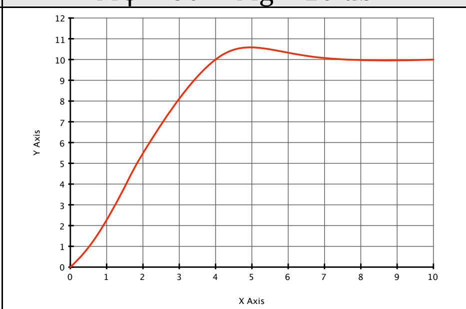
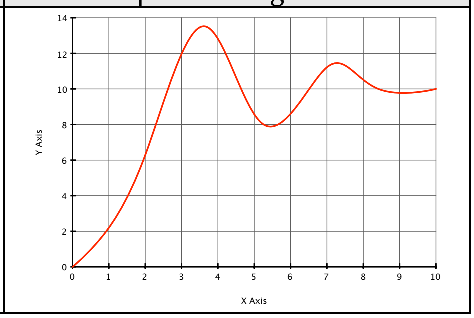
5.3. Calcul de la marge de gain

Calcul de la marge de gain Mg	Calcul de la marge de phase $M\phi$
ωo vérifie : $Arg(T(j\omega o)) = -\pi$	ωo vérifie : : $\lvert T(j\omega o)\rvert = 1$
$Mg \;=\; -20 \times log(\lvert T(j\omega o\rvert)$	$M\phi = \pi + Arg(T(j\omega o))$

5.4. Calcul du gain A du correcteur

Si on donne la marge de gain Mg	Si on donne la marge de phase Mϕ
ωo vérifie : $Arg(T(j\omega o)) = -\pi$	ωo vérifie : $M\phi = \pi + Arg(T(j\omega o))$
A vérifie : $-20 \times log(\lvert T(j\omega o\rvert) = Mg$	A vérifie : $\lvert T(j\omega o)\rvert = 1$

5.5. Influence de la marge de phase

Mϕ = 75° - Mg = 15 db	Mϕ = 60° - Mg = 10 db	Mϕ = 30° - Mg = 4 db
		

6. Précision d'un système bouclé

6.1. Précision statique

La précision statique d'un système bouclé est mesurée à l'aide de la valeur de l'erreur ε(t) en régime permanent, pour une consigne constante.

$$\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$$

Ainsi, grâce au théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \times \varepsilon(p)$$

Dans la mesure où w(t)=a×u(t), avec a une constante réelle, on a aussi :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \times \frac{a}{p} \times \frac{1}{1+T(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{1+T(p)}$$

Pour avoir une erreur statique nulle il suffit d'avoir : $\lim_{p \to 0} T(p) = +\infty$

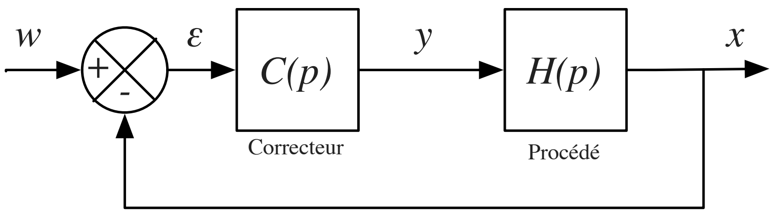
6.2. Dilemme stabilité-précision

6.2.1. Notations

Dans la suite on représentera une boucle de régulation par le schéma bloc simplifié ci-contre, avec :

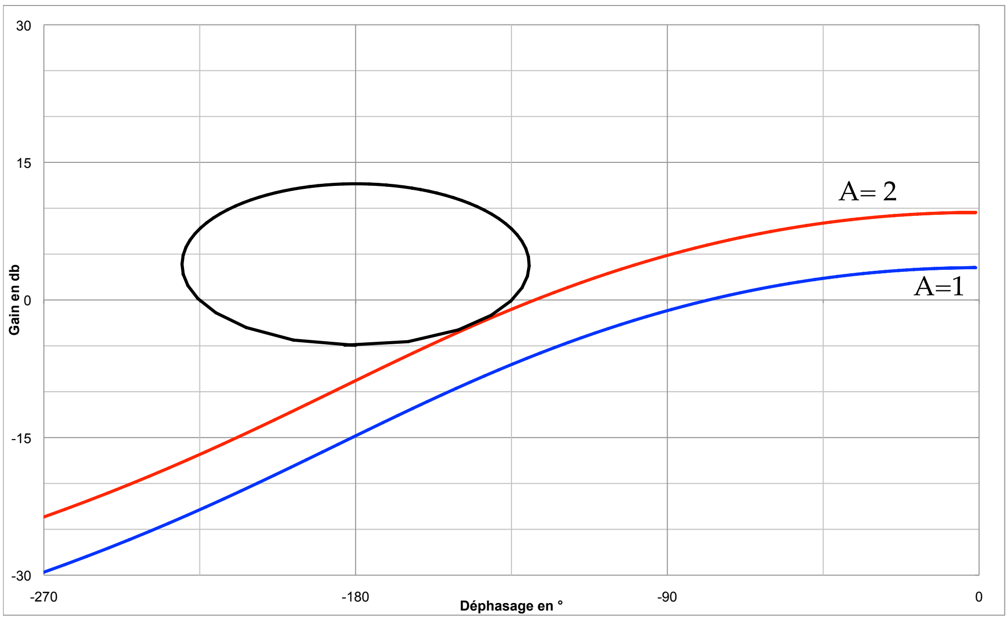
- La mesure x ;
- La consigne w ;
- L'erreur ε ;
- La fonction de transfert du procédé H ;
- La fonction de transfert du correcteur C.

Ainsi, T(p)=C(p)×H(p).



6.2.2. Action proportionnelle

Pour se rapprocher de T(p)=+∞, il suffit de multiplier H(p) par une constante A 'très grande'. C'est le correcteur proportionnel : C(p)=A. Influence de A sur le plan de Black :



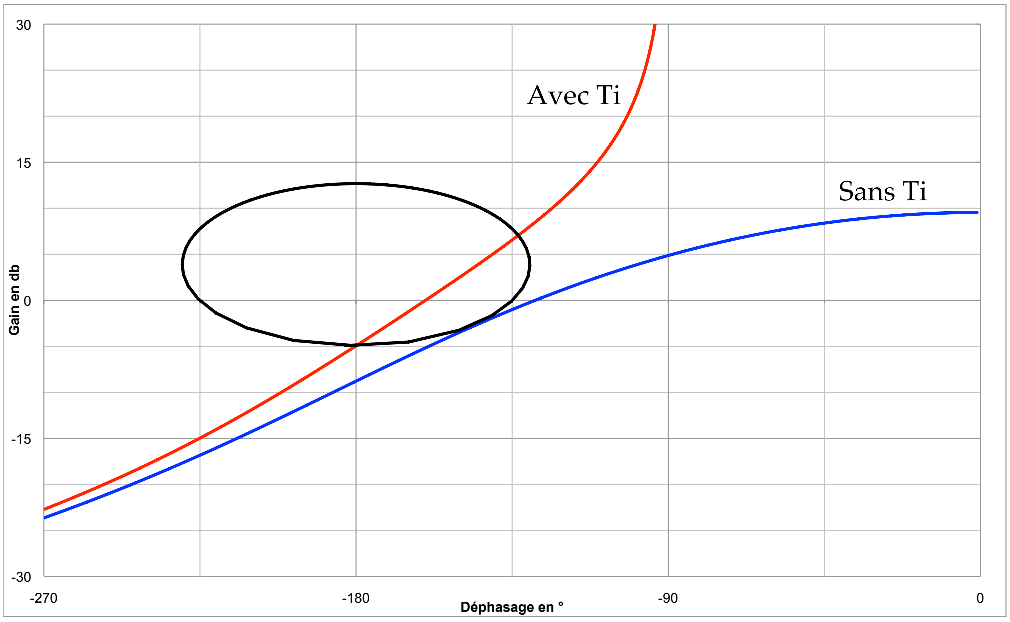
Remarque :

Cette action a des limites, car sur le plan de Black, elle rapproche le lieu de transfert de T(jω) du point critique.

6.2.3. Action intégrale

Cette action permet d'avoir une erreur statique nulle, en ajoutant un pôle à H(p). Comme l'action intégrale n'est jamais utilisée seule, on aura comme fonction de transfert d'une correction PI série :

$$C(p) = A\frac{1 + Ti \times p}{Ti \times p}$$



Remarques :

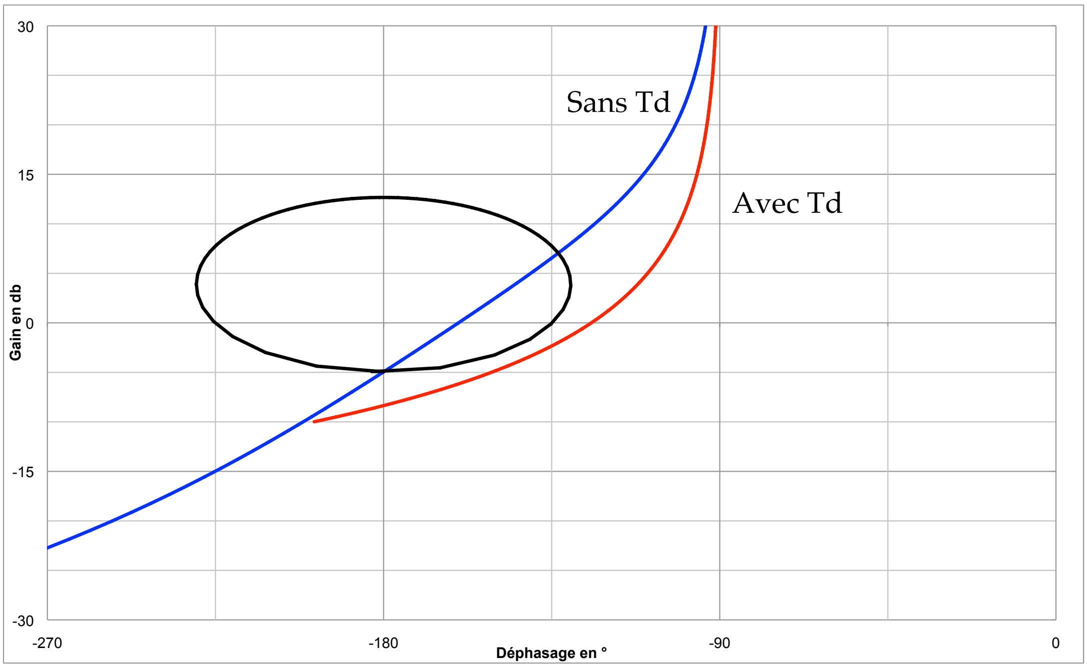
- En choisissant Ti égal à la valeur de la constante de temps d'un premier ordre, on éliminera un pôle de T(p).
- L'action intégrale rapproche la courbe du point critique. Elle déstabilise la boucle fermée.

6.2.4. Action dérivée

L'action dérivée va nous permettre d'augmenter la valeur du gain pour les hautes fréquences. Avec les actions P, I et D, le correcteur devient, pour une régulateur série :

L'action dérivée va nous permettre d'augmenter la valeur du gain pour les hautes fréquences.
Avec les actions P, I et D, le correcteur devient, pour une régulateur série :

$$C(p) = A\frac{1 + Ti \times p}{Ti \times p}(1 + Td \times p)$$



<u>Remarques :</u> En choisissant bien la valeur de Td, on pourra éliminer un pôle de H(p).